

因式分解进阶二

一、换元法

换元法：“换元”就是“_____”，即用新的“元”去代替原式中的式子，使得原式变成含新“元”的式子，然后对含新“元”的式子按要求求出结果，在将其所代替的式子代回，求出原式的结果。利用换元法因式分解，就是将多项式中的某一部分用一个新字母（元）来代替，进行变量替换，将问题转化，从而起到化繁为简、化隐为显、化难为易的作用。

1. 直接换元法

将式子中出现的 _____ 或 _____ 的式子用新的字母（元）代替，在因式分解。

例题

1. 因式分解：

- (1) $(a - 2b)^2 + 2(a - 2b) + 1$.
- (2) $(x + y)^2 - 4(x + y) - 12$.
- (3) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 4(x^2 + 4x + 8) + 3$.
- (4) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$.

练习

2. 分解因式： $(x + y)^2 + 6x + 6y + 9$.

3. 分解因式：

(1) $(x^2 + 7x + 8)^2 + 3(x^2 + 7x + 8) + 2$.

(2) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$.

|| 例题

4. 分解因式：

(1) $(x^2 + 5x + 2)(x^2 + 5x + 3) - 12$.

(2) $(x^2 - x - 3)(x^2 - x - 5) - 3$.

|| 练习

5. 分解因式： $(x^2 + 4)(x^2 + 6) - 48$ ，正确的是（ ） .

A. $(x^2 + 4)(x^2 - 6)$ B. $(x^2 - 4)(x^2 + 6)$ C. $(x^2 + 12)(x^2 - 2)$ D. $(x^2 - 12)(x^2 + 2)$

6. 分解因式： $(x^4 + x^2 - 4)(x^4 + x^2 + 3) + 10 = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 先变形再换元

这类题目直接看不出题目中有哪些具有相同部分的多项式，因此不能直接利用换元法因式分解，需要先进行多项式之间的 _____，两两一组先求出乘积，再观察式子的特点，最后利用换元法进行因式分解．需要注意的是式子中有四个括号连乘，需要先观察分析让哪两个式子在一组进行乘法计算，才能得到含有相同部分的多项式．

例题

7. 分解因式：

$$(1) (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15.$$

$$(2) (a-1)(a-2)(a-3)(a-4) - 24.$$

8. 分解因式： $(x-1)(2x-1)(3x-1)(6x-1) + x^2$.

练习

9. 分解因式： $16(6x-1)(2x-1)(3x+1)(x-1) + 25$.

|| 例题

10. 分解因式 $(x^2 + 3x + 2)(3 + 8x + 4x^2) - 90$.

|| 练习

11. 分解因式： $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - x - 2) - 72$.

3. 平均值换元法

平均值换元法就是将式子中需要换元的两项_____，得到这两项的_____，再设这个_____为新的元，代入原式进行因式分解．这类题目除了用_____换元法外，也可以利用直接换元法解决．做题时应灵活应用．

|| 例题

12. 分解因式： $(x + 5)^4 + (x + 3)^2 - 82$.

|| 练习

13. 分解因式： $(x^2 - x - 3)(x^2 - x - 5) - 3$.

二、拆项添项法

1. 因式分解： $(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 =$ _____ .

2. 试回答：

①完成上面的因式分解你用到了什么方法/哪个公式？

②请把问题中的多项式化简，得 _____ ,

如果要对这个式子做因式分解你可以用什么方法？请尝试完成因式分解：

_____ .

1. 添项

|| 例题

14. 分解因式： $a^4 + \frac{1}{4}$.

15. 因式分解： $x^3 + 4x^2 - 5$.

练习

16. 请看下面的问题：把 $x^4 + 4$ 分解因式

分析：这个二项式既无公因式可提，也不能直接利用公式，怎么办呢？

19世纪的法国数学家苏菲·热门抓住了该式只有两项，而且属于平方和 $(x^2)^2 + (2)^2$ 的形式，要使用

公式就必须添一项 $4x^2$ ，随即将此项 $4x^2$ 减去，即可得 $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$

$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

人们为了纪念苏菲·热门给出这一解法，就把它叫做“热门定理”，请你依照苏菲·热门的做法，将下列各式因式分解。

(1) $x^4 + 4y^4$.

(2) $x^2 - 2ax - b^2 - 2ab$.

2. 拆项

例题

17. 分解因式： $4x^2 - 4x - y^2 + 4y - 3$.

18. 分解因式： $3x^3 + 7x^2 - 4$.

19. 分解因式： $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

练习

20. 分解因式： $a^3 + 3a^2 + 3a + 2$.

21. 分解因式： $x^2 - y^2 + 5x + 3y + 4$.

22. 分解因式： $x^3 - 9x + 8$.

三、立方和、立方差公式

1. 用立方和、立方差公式的因式分解

立方和、立方差

立方和公式：

立方差公式：

|| 例题

23. 因式分解：

$$(1) x^3 - x + y^3 - y .$$

练习

24. 分解因式：

(1) $x^8 - y^8$.

(2) $16x^5 - x$.

(3) $8a^3b^3c^3 - 1$.

(4) $64x^6y^3 + y^{15}$.

2. 立方和、立方差公式相关的求值问题

例题

25. 已知 $x + y = 1$, $x^2 + y^2 = 2$, 求 $x^7 + y^7$ 的值 .

练习

26. 如果 $m - \frac{1}{m} = -3$, 那么 $m^3 - \frac{1}{m^3} = \underline{\hspace{2cm}}$.

27. 已知 $a + b = 10$, $a^3 + b^3 = 100$, 则 ab 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

 我学到了什么